DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

NOTATIONS :

- $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n, p)$: ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- pour $A \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n, p)$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$: a_{ij} est l'élément de A situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j;
- à $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ élément de $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n, 1)$ on associe $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;
- à $A \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n, p)$, on associe Φ_A application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ est A;
- si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on note $< x|y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. En remarquant que ${}^tX.Y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)$ et en identifiant cette matrice (1, 1) avec son unique coefficient, on notera aussi $< x|y > = {}^tX.Y$;
- si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on note $\|x\| = \|X\| = \sqrt{< x|x >}$;
- à $A \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n, p)$ on associe $\|\Phi_A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^p \\ x \neq 0}} \frac{\|\Phi_A(x)\|}{\|x\|}$;

$$\left(\text{ou matriciellement : } \|A\| = \sup_{\substack{X \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(p, 1) \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \right).$$

On rappelle que l'on définit ainsi une norme sur $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n, p)$),

et que :

$$\forall A \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n, p) \quad \forall X \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(p, 1) : \|AX\| \leq \|A\| \ \|X\|$$
$$\forall A \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n, p) \quad \forall B \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(p, q) \quad \|AB\| \leq \|A\| \ \|B\|$$

OBJET DU PROBLÈME.

Étude de quelques questions liées à la résolution approchée d'équations de la forme :

$$AX = B, \quad \text{où } A \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n, p), \quad X \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(p, 1) \quad B \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n, 1).$$

Pour les parties I et II, A est supposée carrée et inversible. Il existe alors une solution unique. Il s'agit dans I de savoir comment est modifiée cette solution quand B subit une certaine variation ΔB, et dans II de construire une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dont la limite est l'unique solution de $AX = B$.

La partie III étudie le cas d'équations n'ayant pas de solution. On se contente alors de « pseudo-solutions ».

PARTIE I

Dans cette partie, $A \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n, n)$, A inversible.

1° Soit X ($X \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n, 1)$) l'unique solution de $AX = B$ ($B \in \mathfrak{M}_{\mathbb{R}}(n, 1)$, $B \neq 0$).

Quand B devient $B + \Delta B$, alors X devient $X + \Delta X$, tel que $A(X + \Delta X) = B + \Delta B$.

Tournez la page S. V. P.

Montrer que :

(1) $$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leqslant \|A\| \ \|A^{-1}\| \ \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}, \quad \text{et que } \|A\| \ \|A^{-1}\| \geqslant 1.$$

On notera dans toute la suite $\mu(A) = \|A\| \ \|A^{-1}\|$.

2° On pose $A' = {}^tA.A$.

a. Montrer que les valeurs propres de A' sont réelles, strictement positives, et qu'il existe P orthogonale et D diagonale tel que $D = P^{-1}A'P$;

b. Les valeurs propres de A' étant notées $(\lambda'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et rangées dans l'ordre croissant $(0 < \lambda'_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda'_n)$, montrer que pour tout Y dans $\mathfrak{M}_R(n, 1)$:

$$\|AY\| \leqslant \sqrt{\lambda'_n} \ \|Y\|, \text{ et qu'il existe } Y_0 \text{ tel que } \|AY_0\| = \sqrt{\lambda'_n} \ \|Y_0\|$$

En déduire : $\|A\|$.

c. Montrer que ${}^tA.A$ et $A.{}^tA$ ont le même polynôme caractéristique. En remplaçant A par A^{-1} dans *b*, en déduire $\|A^{-1}\|$, et enfin : $\mu(A) = \sqrt{\frac{\lambda'_n}{\lambda'_1}}$.

3° *a.* On suppose A orthogonale. Calculer $\mu(A)$.

b. On suppose A symétrique. Exprimer $\mu(A)$ en fonction des valeurs propres de A.

c. Application numérique :

$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\mu(A)$, et déterminer ΔB (avec par exemple $\|\Delta B\| = 1$) de façon que $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} = \mu(A) \ \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}$ (ce qui prouve que l'inégalité (1) ne peut pas être améliorée dans le cas général).

Partie II

Notations :

si $X \in \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}(n, 1)$, on pose $\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ et si $A \in \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}(n, n)$, on pose $\|A\| = \sup_{\substack{X \in \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}(n,1) \\ X \neq 0}} \left(\frac{\|AX\|}{\|X\|} \right)$.

1° *a.* Soit $M \in \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}(n, n)$. On suppose que :

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad |m_{ii}| > \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |m_{ij}|.$$

Montrer qu'il n'existe aucun $X \in \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}(n, 1)$ tel que $X \neq 0$ et $MX = 0$.

En déduire que M est inversible.

Tournez la page S. V. P.

b. Soit $N \in \mathfrak{M}_R(n, n)$. On pose :

pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $R_i = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |n_{ij}|$, $D(n_{ii}, R_i) = \{z \in \mathbb{C} / |z - n_{ii}| \leqslant R_i\}$, et $G_N = \bigcup_{i=1}^{n} D(n_{ii}, R_i)$.

Montrer que les valeurs propres de N (réelles ou complexes) appartiennent toutes à G_N.

2° Soit $M \in \mathfrak{M}_R(n, n)$. On appelle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de M (réelles ou complexes), et on pose :

$$\rho(M) = \operatorname{Sup}_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i| .$$

a. Montrer que si $\lim_{k \to +\infty} M^k = 0$, alors $\rho(M) < 1$.

b. Montrer que, si M est diagonalisable et $\rho(M) < 1$, alors $\lim_{k \to +\infty} M^k = 0$.

c. On se propose de démontrer le résultat précédent sans l'hypothèse « M diagonalisable ». Le polynôme caractéristique de M étant écrit sous la forme :

$$P_M(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda'_i)^{r_i}$$

(les λ'_i étant les valeurs propres disctinctes de M et les r_i leurs ordres de multiplicité respectifs), *on admet* qu'il existe $M' \in \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}(n, n)$, $P \in \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}(n, n)$ vérifiant :

P inversible;

$M' = P^{-1}MP$;

$$M' = \begin{pmatrix} M'_1 & & (0) \\ & M'_2 & \\ (0) & & M'_p \end{pmatrix},$$

avec : $\forall i = 1, \ldots, p$: $M'_i \in \mathfrak{M}_{\mathbb{C}}(r_i, r_i)$, $M'_i = (\lambda'_i)$ si $r_i = 1$ et $M'_i = \lambda'_i I_{r_i} + J_{r_i}$ si $r_i \geqslant 2$

(où $I_{r_i} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$ et $J_{r_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$,

c'est-à-dire $J_{r_i} = (a_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant r_i}$, avec $a_{i, i+1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant r_i - 1$ et $a_{i,j} = 0$ si $j \neq i + 1$).

QUESTIONS :

Calculer $J_{r_i}^{\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$, en déduire que :

$$J_{r_i}^{r_i} = 0, \quad \| J_{r_i} \| \leqslant 1, \quad \text{et} \quad \| M_i'^k \| \leqslant \sum_{\alpha=0}^{n} C_k^{\alpha} |\lambda'_i|^{k-\alpha} \quad \text{si} \quad k \geqslant n .$$

Montrer que $\lim_{k \to +\infty} M_i'^k = 0$, et en remarquant que $\| M'^k \| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \| M_i'^k \|$,

en déduire $\lim_{k \to +\infty} M'^k$ et enfin $\lim_{k \to +\infty} M^k$.

Tournez la page S. V. P.

3° Soit $A \in \mathfrak{M}_R(n, n)$. On suppose que : $\forall i = 1, \ldots, n \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{ij}|$.

On pose $A = D + G$, où $d_{ii} = a_{ii}$ et $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$, et $G = A - D$.

a. Vérifier que A est inversible, que D est inversible, et que l'équation $AX = B$ est équivalente à $X = A'X + B'$, où $A' = -D^{-1}G$ et $B' = D^{-1}B$.

b. Monter que $\rho(A') < 1$, en déduire $\lim_{k \to +\infty} A'^k$.

c. Soit L l'unique solution de $AX = B$. On définit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par : $X_0 \in \mathfrak{M}_R(n, 1)$ et : $\forall k \in \mathbb{N} \quad X_{k+1} = A'X_k + B'$. En étudiant $(X_k - L)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers L.

Partie III

Dans cette partie : $A \in \mathfrak{M}_R(n, p)$, $B \in \mathfrak{M}_R(n, 1)$, et on suppose qu'il n'existe aucune matrice X ($X \in \mathfrak{M}_R(p, 1)$) telle que $AX = B$. (2)

On appelle pseudo-solution de (2) toute matrice X_0 ($X_0 \in \mathfrak{M}_R(p, 1)$) telle que :

$$\| AX_0 - B \| = \inf (\| AX - B \|, \quad X \in \mathfrak{M}_R(p, 1))$$

(ce que l'on peut écrire également : $\| \Phi_A(x_0) - b \| = d(b, \operatorname{Im} \Phi_A)$, en posant $d(b, \operatorname{Im} \Phi_A) = \inf (\| \Phi_A(x) - b \|, x \in \mathbb{R}^p)$).

1° *a.* En étudiant la projection orthogonale de b sur $\operatorname{Im} \Phi_A$, démontrer l'existence de pseudo-solutions de (2).

b. On suppose de plus Φ_A injective. Montrer que (2) admet alors une pseudo-solution x_0 *unique*.

c. Montrer que :

$$x \text{ pseudo-solution de (2)} \Leftrightarrow [\forall y \in \mathbb{R}^p < \Phi_A(y) \mid \Phi_A(x) - b > = 0] \Leftrightarrow [{}^tAAX = {}^tAB]$$

2° *Application :* Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthnormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne n points $M_k(x_k, y_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Soit (D) la droite d'équation $y = ax + b$. On définit, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $H_k(x_k, ax_k + b)$ et on se propose de déterminer D de façon que $\sum_{k=1}^{n} \| \overrightarrow{M_k H_k} \|^2$ soit minimum.

Montrer que ce problème revient à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $AX = B$, où A, B, X sont trois matrices que l'on explicitera.

À quelle condition sur $(M_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ Φ_A est-elle injective ? Déterminer alors *la* pseudo-solution de $AX = B$.

3° *Généralisation :* soit C une partie de $\mathbb{R}^p$. On suppose C non vide, $C \neq \mathbb{R}^p$, $\Phi_A(C)$ partie fermée et convexe de $\mathbb{R}^n$. On recherche les pseudo-solutions de : $\Phi_A(x) = b$, $x \in C$.

a. Montrer l'existence d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C telle que :

$$\lim_{k \to +\infty} \| \Phi_A(x_k) - b \| = d(b, \Phi_A(C))$$

b. Montrer que $(\Phi_A(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

c. En déduire l'existence de pseudo-solutions de : $\Phi_A(x) = b$, $x \in C$.